

Erfolge in Serie: Ein rekursiver Ansatz¹

JARED BURCH, USA

¹ Das Original erschien in Teaching Statistics (Volume 33, Number 3, Autumn 2011; S. 76–77).
Originaltitel: Consecutive Successes:
A Recursive Approach
Übersetzung und Kürzung: J. MEYER

Zusammenfassung: *Wie lange muss man warten, bis man mit einer Münze oder einem Würfel zwei oder mehr direkt aufeinander folgende Erfolge hat? Hier wird ein rekursiver Ansatz zur Lösung des Problems erläutert.*

1 Die Fragestellung

Neulich fragte mich ein Kollege, wie lange man im Schnitt mit einem Würfel werfen müsse, um zwei direkt aufeinander folgende Sechsen zu erhalten.

Etwas später fragte mich der gleiche Kollege, wie lange man im Schnitt warten müsse, bis man beim Münzwurf zwei aufeinander folgende „Kopf“-Ergebnisse habe.

2 Die Lösung

Das Problem hat mit der geometrischen Verteilung zu tun. Um zwei aufeinander folgende „Kopf“-Ergebnisse zu erhalten, braucht man zunächst das erste „Kopf“-Ergebnis. Die durchschnittliche Anzahl E_1 der Würfe, bis man zum ersten Mal „Kopf“ bekommt, ist 2, da der Erwartungswert der geometrischen Verteilung $1/p$ ist mit p als Einzelerfolgs-Wahrscheinlichkeit. Nach einem „Kopf“ bekommt man mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit beim nächsten Wurf (mit der Nummer $E_1 + 1$) wieder einen „Kopf“, und mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit wird man wieder zum Anfangszustand zurück befördert, in dem man zwei aufeinander folgende „Köpfe“ braucht. Die zu erwartende Anzahl E_2 der Würfe, um 2 aufeinander folgende „Köpfe“ zu erhalten, genügt also der Rekursion

$$E_2 = 0,5 \cdot (E_1 + 1) + 0,5 \cdot (E_1 + 1 + E_2)$$

bzw.

$$E_2 = 2 \cdot (E_1 + 1),$$

was zu $E_2 = 6$ führt.

Die gleiche Vorgehensweise lässt sich beim Würfeln anwenden und führt zu

$$E_2 = \frac{1}{6} \cdot (E_1 + 1) + \frac{5}{6} \cdot (E_1 + 1 + E_2)$$

bzw. zu

$$E_2 = 6 \cdot (E_1 + 1)$$

und damit wegen $E_1 = 6$ zu $E_2 = 42$.

Die Methode lässt sich ausbauen: Die zu erwartende Anzahl E_3 , drei aufeinander folgende Sechsen zu erhalten, ermittelt sich über

$$E_3 = \frac{1}{6} \cdot (E_2 + 1) + \frac{5}{6} \cdot (E_2 + 1 + E_3)$$

und

$$E_3 = 6 \cdot (E_2 + 1)$$

zu $E_3 = 258$. Analog ist $E_4 = 1554$.

Aufgrund der rekursiven Natur ergibt sich ein Bildungsmuster:

$$E_1 = 6$$

$$E_2 = 6 \cdot (E_1 + 1) = 6^2 + 6$$

$$E_3 = 6 \cdot (E_2 + 1) = 6^3 + 6^2 + 6$$

$$E_4 = 6 \cdot (E_3 + 1) = 6^4 + 6^3 + 6^2 + 6$$

...

Ist die Einzelerfolgs-Wahrscheinlichkeit p , so ist die durchschnittliche Wartezeit für n aufeinanderfolgende Erfolge gegeben durch

$$E_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p}\right)^i = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} = \frac{1-p^{n+1}}{(1-p) \cdot p^n}.$$

Bei Feller (1968) und bei Chamberlain (1979) finden sich kompliziertere Beweise für dieses Resultat.

Literatur

Feller, W. (1968): An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol. I). New York: John Wiley & Sons.

Chamberlain, M. (1979): Coin tossing problem revisited. In: *Two-Year College Mathematics Journal* 5 (10), S. 349–350.

Anschrift des Verfassers

Jared Burch
College of the Sequoias, Visalia, California, USA
jaredb@cos.edu